ベクトル値写像と実数値写像に対する単調作用素について (一般位相幾何学の進展と諸問題)

山崎, 薫里

数理解析研究所講究録 第2110巻 2019年 75-84

ベクトル値写像と実数値写像に対する単調作用素について

高崎経済大学・経済学部　山崎 薫里[1]

Kaori Yamazaki

**Faculty of Economics,
Takasaki City University of Economics**

1　研究の目的・背景

本稿では, [10], [11] で得られた結果, 証明の手法, および, その背景を紹介する.

集合 X の部分集合からなる列 $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}, (B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が, 各 $n\in\mathbb{N}$ について $A_n\subset B_n$ となるとき, $(A_n)\preccurlyeq(B_n)$ と表記する. Good, Knight, Stares は, [6] において, 単調可算パラコンパクト性の概念を導入した. 位相空間 X が単調可算パラコンパクト [6] (*monotonically countably paracompact*) であるとは, X の閉集合からなる単調減少な列 $(D_j)_{j\in\mathbb{N}}$ で $\bigcap_{j\in\mathbb{N}} D_j=\emptyset$ なものに対し, X の開集合からなる単調減少な列 $U((D_j))=(U(n,(D_j)))_{n\in\mathbb{N}}$ で次の (1), (2), (3) を満たすようなものを対応させる作用素 U が存在するときをいう.

(1) 各 $n\in\mathbb{N}$ に対し, $D_n\subset U(n,(D_j))$;

(2) $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\overline{U(n,(D_j))}=\emptyset$;

(3) $(D_j)\preccurlyeq(E_j)$ ならば $U((D_j))\preccurlyeq U((E_j))$ である.

単調可算パラコンパクト性は, コンパクト空間や距離空間を同時に一般化する概念であるため, [6] で導入されて以来, 盛んに研究されている性質であるといえる. 特に, この性質は可算パラコンパクト空間に単調性を付加した位置づけであり, 積空間との関連性を含め, 基本的な問題が提起されている (cf. [6]). 本稿では, 写像としての表現に焦点をあて, 単調作用素の存在について得られた結果を紹介する.

順序の入った集合 $(Y,\le)$ への写像 $f,g:X\to Y$ が, 任意の $x\in X$ について $f(x)\le g(x)$ であるとき, $f\le g$ と表す. 写像 $f:X\to Y$ に対し, 写像 $\Phi(f):X\to Y$ を対応させる作用素 Φ が単調 (*monotone*) であるとは, $f\le g$ ならば $\Phi(f)\le\Phi(g)$ であるときをいう.

[1]本研究は, 高崎経済大学研究奨励費（平成 30 年度, No.1）の助成を受けている.
e-mail: kaori@tcue.ac.jp

以下, X を位相空間とする. 単調可算パラコンパクト性を, 写像に対する作用素の存在として表現するため, 次の 3 条件 (a), (b), (c) を考える. ここで, $(0,\infty)$ は $\{r \in \mathbb{R} : r > 0\}$ を表す.

(a) X は単調可算パラコンパクトである.

(b) 上半連続関数 $f : X \to \mathbb{R}$ に対し, 下半連続関数 $\Phi(f) : X \to \mathbb{R}$ と上半連続関数 $\Psi(f) : X \to \mathbb{R}$ を $f \leq \Phi(f) \leq \Psi(f)$ となるように対応させる単調作用素 Φ, Ψ が存在する.

(c) 下半連続関数 $f : X \to (0,\infty)$ に対し, 上半連続関数 $\Phi(f) : X \to (0,\infty)$ と下半連続関数 $\Psi(f) : X \to (0,\infty)$ を $\Psi(f) \leq \Phi(f) \leq f$ となるように対応させる単調作用素 Φ, Ψ が存在する.

定理 1.1. ([6], [5], [9]) *位相空間 X について, 上述の 3 条件 $(a), (b), (c)$ は同値である.*

[9] において, 定理 1.1 の $(b), (c)$ における "実数" 値関数を "正の内点をもつ順序位相ベクトル空間 Y" への写像に一般化できるかという問題が提起された. 半順序の入った実ベクトル空間 $(Y, \leq)$ が順序ベクトル空間 (*ordered vector space*) であるとは, 条件 (i) $x \leq y$ ならば $x + z \leq y + z$, (ii) $x \leq y$, $r \geq 0$ ならば $rx \leq ry$, をみたすときをいう. 順序ベクトル空間である線形位相空間 $(Y, \leq)$ に対し, 正錘 $Y^+ := \{y \in Y : \mathbf{0} \leq y\}$ が閉集合となるとき, Y は順序位相ベクトル空間 (*ordered topological vector space*) と呼ばれる. 点 $e \in Y^+$ が順序単位 (*order unit*) であるとは, 任意の $y \in Y$ に対し, $\lambda_y > 0$ で $y \leq \lambda_y e$ となるものが存在するときをいう. 特に, 正錘 Y^+ の内点は, 順序単位である ([2]).

順序ベクトル空間 Y は, 任意の 2 点集合 $\{x, y\}$ が上限 $x \vee y$ と下限 $x \wedge y$ をもつとき, ベクトル束 (*vector lattice*) と呼ばれる. ベクトル束 Y とその元 $y \in Y$ に対し, 記号 $|y|$ を $|y| := y \vee (-y)$ と定義する.

ベクトル束 Y への写像 $f : X \to Y$ について, 写像 $|f| : X \to Y$ を $|f|(x) = |f(x)|$ $(x \in X)$ と定義する. 位相空間 X から順序位相ベクトル空間 Y への写像 $f : X \to Y$ が下半連続 (*lower semi-continuous*) (resp. 上半連続 *upper semi-continuous*) とは, 任意の $x \in X$ と任意の $\mathbf{0}$ 近傍 V に対し, x の近傍 O で $f(O) \subset f(x) + V + Y^+$ (resp. $f(O) \subset f(x) + V - Y^+$) となるものが存在することをいう. 任意の $\mathbf{0}$ 近傍 U に対し, $\mathbf{0}$ 近傍 V_U が $(V_U + Y^+) \cap (V_U - Y^+) \subset U$ となるようにとれるとき, 正錘 Y^+ が正規 (*normal*) であるという. 定義からわかるように, Y^+ が正規であるとき, $f : X \to Y$ が上かつ下半連続であることと f が連続であることが同値である.

正錘 Y^+ の内点で $\mathbf{0}$ でないものを正の内点 (*positive interior point*) という. 位相空間 X 上の有界関数全体 $C^*(X)$ で sup ノルムを入れた空間における 1 は, 正の内点の例である.

以下, Y を正の内点をもつ順序位相ベクトル空間とする. 上述の条件 $(b),(c)$ のベクトル値写像版である次の条件を考える.

(b') 上半連続写像 $f : X \to Y$ に対し, 下半連続写像 $\Phi(f) : X \to Y$ と上半連続写像 $\Psi(f) : X \to Y$ を $f \leq \Phi(f) \leq \Psi(f)$ となるように対応させる単調作用素 Φ, Ψ が存在する.

(c') 下半連続写像 $f : X \to Y^+ \setminus \{\mathbf{0}\}$ に対し, 上半連続写像 $\Phi(f) : X \to Y^+ \setminus \{\mathbf{0}\}$ と下半連続写像 $\Psi(f) : X \to Y^+ \setminus \{\mathbf{0}\}$ を $\Psi(f) \leq \Phi(f) \leq f$ となるように対応させる単調作用素 Φ, Ψ が存在する.

[9] において, $(a) \Leftrightarrow (b')$ が示された. このことは, オリジナルの定理1.1の $(a) \Leftrightarrow (b)$ に対し, "$\mathbb{R}$" を "正の内点をもつ任意の順序位相ベクトル空間 Y" にできるという強い意味での一般化と, (b') の Y は正の内点をもつ順序位相ベクトル空間であればどのようなものであっても (a) を導くテスト空間になりうるという弱い意味での一般化になっている. 一方, (c') に関しては, $(b) \Leftrightarrow (c)$ の証明で用られる実数と逆の順序を与える手法が Y に適用できないため, 同様な同値性は未解決であった. 実際, 以下の問題が提出されていた.

問題 1.2. ([9]) 位相空間 X と正の内点をもつ順序位相ベクトル空間 Y に対して, $(a) \Leftrightarrow (c')$ は成り立つか?

問題 1.2 の部分解として, 最近, 以下の 2 つの定理 1.3, 及び, 定理 1.4 が発表された.

定理 1.3. (Yang [12]) X を位相空間, Y を順序位相ベクトル空間, e をその正の内点とするとき, 次の (1), (2) が成立する.

(1) $(c') \Rightarrow (a)$ が成立する.

(2) $Y^+ \setminus \{\mathbf{0}\}$ の任意の点が順序単位であるとき, $(a) \Rightarrow (c')$ が成立する.

定理 1.4. (Jin, Xie and Yue [7]) X を位相空間, Y を順序位相ベクトル空間, e をその正の内点とするとき, 次の条件 (c'') は, (a) と同値である.

(c'') 下半連続写像 $f : X \to \mathrm{int}_Y Y^+$ に対し, 上半連続写像 $\Phi(f) : X \to \mathrm{int}_Y Y^+$ と下半連続写像 $\Psi(f) : X \to \mathrm{int}_Y Y^+$ を $\Psi(f) \leq \Phi(f) \leq f$ となるように対応させる単調作用素 Φ, Ψ が存在する.

定理 1.4 では, Y の順序を全順序として証明している部分がいくつかみられ証明は不完全であるが, 定理自体は成立する.

定理 1.3 の (2) において, 条件 "$Y^+ \setminus \{\mathbf{0}\}$ の任意の点が順序単位である" を満たす順序位相ベクトル空間 Y と, 実数直線 $\mathbb{R}$ との本質的な差について, 以下の問題が提出されていた.

問題 1.5. (Yang [12]) 正の内点をもつ順序位相ベクトル空間で, $\mathbb{R}$ と（順序位相ベクトル空間として）同型なものを除いてこの条件を満たすものが存在するか？

[10] において, 問題 1.5 は否定的であることを示す次の定理を得た.

命題 1.6. ([10]) $Y^+ \setminus \{\mathbf{0}\}$ の各点が順序単位であるとき, Y と $\mathbb{R}$ は (順序位相ベクトル空間として) 同型である.

問題 1.2 の本質的な方向は, $(a) \Rightarrow (c')$ であり, その証明の難点は Y の正錘の境界の扱いにあるといってよい. Yang の定理 (定理 1.3）では正錘の境界でも上手くいくための条件を付加して部分的解決を試みたものであるが, 命題 1.6 が示すようにその条件を満たす Y は, 実質的には $\mathbb{R}$ となってしまう. 一方, Jin-Xie-Yue の定理 (定理 1.4) は, 難点である正錘の境界を排除して内部のみの終域を設定することで, 問題 1.2 の部分解を与える試みである.

2　ミンコフスキー汎関数を用いた間接的証明

[9] で与えた定理 1.2 の証明は, 定理 1.1 の “実数値” 版の証明を “順序ベクトル値” 版に直接的に一般化したものであり, 実数では容易な計算であっても半順序集合であるベクトル値では複雑になってしまう.

論文 [10], [11] では, ミンコフスキー汎関数のような写像 $p_e : Y \to \mathbb{R}$ を導入し, ベクトル値写像の単調作用素の存在を実数値関数の単調作用素の存在に帰着することができた. すなわち, $(a) \Leftrightarrow (b)$ の証明の手法を倣った $(a) \Leftrightarrow (b')$ の従来の直接方法に対し, 本研究では $(b) \Leftrightarrow (b')$ の同値性を示す間接的手法を与えた. これは, “実数値” で証明できれば（上述のように, 強い意味でも弱い意味でも）一般化といえる “ベクトル値” の定理を与えるものである.

以下, e を順序位相ベクトル空間 Y の正の内点とする. 原点の近傍 U に対して, U のミンコフスキー汎関数 (ゲージ) (*Minkowski functional* (*gauge*)) は, 次のように定義される.

$$p_U : Y \to \mathbb{R}^+;\quad y \mapsto \inf\{r > 0 : y \in rU\}$$

$U = [-e, e]$ とおいたときの p_U, すなわち, $p_{[-e,e]}$ は, 連続なノルムとなることが知られている. また, 正錘 Y^+ が正規であるとき, ノルム $p_{[-e,e]}$ は Y のベクトル位相を与え, 特にこのとき, $\{\frac{1}{n}[-e, e] : n \in \mathbb{N}\}$ は原点 $\mathbf{0}$ の近傍基となる. $e - Y^+$ のミンコフスキー汎関数を, p_{e-Y^+} の代わりに p_e で表す. すなわち,

$$p_e : Y \to \mathbb{R}^+;\ y \mapsto \inf\{r > 0 : y \leq re\}$$

と定義する. また, 写像 q_e を次のように定義する:

$$q_e : \mathrm{int}_Y Y^+ \to (0,\infty);\ y \mapsto \sup\{r > 0 : re \leq y\}.$$

ここで, $y \in \mathrm{int}_Y Y^+$ に対し, $r_1 e \leq y \leq r_2 e$ となる $r_1, r_2 > 0$ がとれるので, $0 < q_e(y) < \infty$ となり, q_e が定義できることに注意する. 写像 q_e の考察には, 次のような q_e の全体 Y への拡張 $\overline{q_e}$ とその対称な関数 $\overline{p_e}$ を考えることが役立つ.

$$\overline{q_e} : Y \to \mathbb{R};\ y \mapsto \sup\{r \in \mathbb{R} : re \leq y\},$$

$$\overline{p_e} : Y \to \mathbb{R};\ y \mapsto \inf\{r \in \mathbb{R} : y \leq re\}.$$

さらに, 逆方向の連続写像 j_e を, 次のように定義する.

$$j_e : \mathbb{R} \to Y;\ r \mapsto re.$$

Y を順序位相ベクトル空間, $A \subset Y$ とする. 任意の $\mathbf{0}$ 近傍 V に対し, $n_V \in \mathbb{N}$ を $A \subset n_V V$ (resp. $A \subset n_V V - Y^+$) となるようにとれるとき, A は<u>有界</u> (*bounded*) (resp. <u>上に有界</u> *upper-bounded*) であるという. Y^+ が正の内点 e をもつとき, A が<u>正で下に有界</u>であるとは, ある $r > 0$ について $A \subset re + Y^+$ とできるときをいう.

順序位相ベクトル空間 X と Y について, 写像 $f : X \to Y$ が<u>有界性保存</u> (resp. <u>上有界性保存</u>) であるとは, X の任意の有界な (resp. 上に有界な) 集合 A の像 $f(A)$ は Y で有界 (resp. 上に有界) であることをいう. また, 写像 $f : X \to Y$ は, $x \leq x'$ ならば $f(x) \leq f(x')$ となるとき, <u>順序保存</u> (*order-preserving*) と呼ばれる. さらに Y が正の内点をもつとき, $f : X \to Y$ が<u>正値下有界性保存</u>であるとは, X の任意の正で下に有界な集合 A の像 $f(A)$ は Y で正で下に有界であることをいう.

次は, ベクトル値写像と実数値関数の関係を考える上での基本命題である.

命題 2.1. *Y を順序位相ベクトル空間, e をその正の内点とするとき, 次が成立する.*

(1) $\mathbf{0} \leq y \leq y'$ ならば, $p_{[-e,e]}(y) \leq p_{[-e,e]}(y')$ である.

(2) Y がベクトル束であるとき, $|y| \leq |y'|$ ならば, $p_{[-e,e]}(y) \leq p_{[-e,e]}(y')$ である.

(3) Y がベクトル束であるとき, $|r| \leq |r'|$ ならば, $|j_e(r)| \leq |j_e(r')|$ である.

(4) 任意の $x, y \in Y$ に対し, $p_e(x+y) \leq p_e(x) + p_e(y)$ が成り立つ.

(5) 任意の $x, y \in Y$ に対し, $\overline{q_e}(x+y) \geq \overline{q_e}(x) + \overline{q_e}(y)$ が成り立つ.

(6) 任意の $x \in Y$ と任意の $r \in \mathbb{R}$ に対し, $\overline{q_e}(x + re) = \overline{q_e}(x) + r$ が成り立つ.

(7) 任意の $r \in \mathbb{R}$ に対し, $|r| = p_{[-e,e]} \circ j_e(r)$ と $r \vee 0 = p_e \circ j_e(r)$ が成り立つ.

(8) 任意の $y \in Y$ に対し, $y, -y \leq j_e \circ p_{[-e,e]}(y)$ と $y \leq j_e \circ p_e(y)$ が成り立つ.

(9) 任意の $y \in Y$ に対し, $j_e \circ \overline{q_e}(y) \leq y$ が成り立つ.

(10) 任意の $r \in \mathbb{R}$ に対し, $\overline{q_e} \circ j_e(r) = r$ と $\overline{p_e}(-y) = -\overline{q_e}(y)$ が成り立つ.

(11) $p_e = \overline{p_e} \vee 0$, および, $\overline{q_e}|_{\mathrm{int}_Y Y^+} = q_e$ が成り立つ.

(12) $p_{[-e,e]}$ は連続で有界性保存である.

(13) p_e は連続, 上有界性保存, 有界性保存, 順序保存である.

(14) $\overline{q_e}$ と q_e は連続, 正値下有界性保存, 上有界性保存, 順序保存である.

(15) j_e は連続, 上有界性保存, 有界性保存, 順序保存である.

命題 2.1 により, 正の内点をもつ順序位相ベクトル空間 Y と実数直線 $\mathbb{R}$, 及び, $\mathrm{int}_Y Y^+$ と $(0, \infty)$ には, 次のような自然な対応が与えられる.

$$Y \underset{j_e}{\overset{p_e}{\rightleftharpoons}} \mathbb{R}\,, \qquad \mathrm{int}_Y Y^+ \underset{j_e}{\overset{q_e}{\rightleftharpoons}} (0, \infty)$$

X を位相空間, Y を順序位相ベクトル空間, $f : X \to Y$ を写像とする. f が局所的に上に有界 (resp. 局所有界) であるとは, 任意の $x \in X$ と任意の $\mathbf{0}$ 近傍 V に対し, x の近傍 O と $n \in \mathbb{N}$ が存在し, $f(O) \subset nV - Y^+$ (resp. $f(O) \subset nV$) とできるときをいう.

Y が正の内点 e をもつとき, 写像 $f : X \to Y$ が 局所的に正で下に有界であるとは, 任意の $x \in X$ に対し, x の近傍 O と $r > 0$ が存在し, $f(O) \subset re + Y^+$ とできるときをいう.

ここで, "実数 r は, $\overline{q_e}(y) = r$ となるような $y \in Y$ 全体を同一視したものと思ってよいか?" という自然な疑問が生じる. これについては, 以下の注のようにまとめられる.

注 2.2. Y を順序位相ベクトル空間, e を Y の正の内点とする.

(1) Y の同値関係 $\sim$ を次のように定義する：$y \sim y' \overset{def}{\Longleftrightarrow} \overline{q_e}(y) = \overline{q_e}(y')$. この同値関係により得られる同値類を $Y/_\sim$ で表し, 自然な商写像 $h_e : Y \to Y/_\sim;\ y \mapsto [y]$ を考える. 集合 $Y/_\sim$ には, $[y] \leq [y'] \overset{def}{\Longleftrightarrow} \overline{q_e}(y) \leq \overline{q_e}(y')$ で, 自然な順序と写像 $k_e : Y/_\sim \to \mathbb{R};\ [y] \mapsto \overline{q_e}(y)$ が与えられる. このとき, $\overline{q_e} = k_e \circ h_e$ で k_e は順序を保存する全単射であり, k_e は連続となる. ここで, $Y/_\sim$ は, 一般には, Y の部分ベクトル空間にはならない.

(2) さらに Y^+ が正規であるとき, (1) で定義される k_e が順序位相同型である. すなわち, Y^+ が正規のときは, $\overline{q_e}$ を商写像 $Y \to Y/_{\sim} = \mathbb{R}$ とみなせる.

(3) Y 上に, 他の同値関係 $\approx$ を次のように定義する : $y \approx y' \overset{def}{\Longleftrightarrow} \overline{p_e}(y) = \overline{p_e}(y')$. y の $\approx$ に対する同値類 $\lfloor y \rfloor$, 商写像 $h'_e : Y \to Y/_{\approx};\ y \mapsto \lfloor y \rfloor$ について, $\lfloor y \rfloor \leq \lfloor y' \rfloor \overset{def}{\Longleftrightarrow} \overline{p_e}(y) \leq \overline{p_e}(y')$ と定義される $Y/_{\approx}$ 上の自然な順序 $\leq$, と連続な全単射 $k'_e : Y/_{\approx} \to \mathbb{R};\ \lfloor y \rfloor \mapsto \overline{p_e}(y)$ は, $\overline{p_e} = k'_e \circ h'_e$ を満たす. もし Y^+ が正規であれば, k'_e は順序位相同型である.

(4) (1) と (3) にある記号に対し,

$$\ell : Y \to Y;\ y \mapsto -y, \quad \ell' : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ r \mapsto -r, \quad \varphi : Y/_{\sim} \to Y/_{\approx};\ [y] \mapsto \lfloor -y \rfloor$$

と定義する. $\overline{p_e}(y) = -\overline{q_e}(-y)$ であるので, φ と逆写像 φ^{-1} は自然に定義され, $\ell' \circ \overline{q_e} \circ \ell = \overline{p_e}$, $\varphi \circ h_e \circ \ell = h'_e$, $\ell' \circ k_e \circ \varphi^{-1} = k'_e$ が成り立つ.

3 $(b) \Leftrightarrow (b')$ の間接証明

Y を順序位相ベクトル空間, e を Y の正の内点とする. 以下, $(b) \Leftrightarrow (b')$ のミンコフスキー汎関数を用いた間接証明を紹介する.

$(b) \Rightarrow (b')$: (b) を仮定し, Φ, Ψ を (b) にある作用素とする. $f : X \to Y$ を上半連続関数とする. このとき, $p_e \circ f : X \to \mathbb{R}^+$ も上半連続関数であるので, $\Phi(p_e \circ f) : X \to \mathbb{R}^+$ は下半連続関数, $\Psi(p_e \circ f) : X \to \mathbb{R}^+$ も上半連続関数となる. さらに, このとき, $j_e \circ \Phi(p_e \circ f) : X \to Y$ は下半連続写像, $j_e \circ \Psi(p_e \circ f) : X \to Y$ は上半連続写像であり, 命題2.1 (8) (15) より, $f(x) \leq j_e \circ (p_e \circ f)(x) \leq j_e \circ \Phi(p_e \circ f)(x) \leq j_e \circ \Psi(p_e \circ f)(x)$ となる. p_e と j_e は順序保存である (命題2.1 (13) (15)) ので, $f \leq f'$ のとき $j_e \circ \Phi(p_e \circ f) \leq j_e \circ \Phi(p_e \circ f')$ および $j_e \circ \Psi(p_e \circ f) \leq j_e \circ \Psi(p_e \circ f')$ であることが示せる. よって, 上半連続写像 f に対し, 下半連続写像 $j_e \circ \Phi(p_e \circ f)$ と上半連続写像 $j_e \circ \Psi(p_e \circ f)$ を対応させる作用素が (b') で求められるものである.

$(b') \Rightarrow (b)$: (b') を仮定し, Φ, Ψ を (b') にある作用素とする. $f : X \to \mathbb{R}$ を上半連続関数とする. このとき, $j_e \circ f : X \to Y$ は上半連続写像なので, $\Phi(j_e \circ f) : X \to Y$ は下半連続写像, $\Psi(j_e \circ f) : X \to Y$ は上半連続写像である. このとき, $p_e \circ \Phi(j_e \circ f) : X \to \mathbb{R}^+$ は下半連続関数, $p_e \circ \Psi(j_e \circ f) : X \to \mathbb{R}^+$ は上半連続関数で, 命題2.1 (7) (13) より, $f \leq p_e \circ (j_e \circ f) \leq p_e \circ \Phi(j_e \circ f) \leq p_e \circ \Psi(j_e \circ f)$ となる. また, j_e と p_e は順序保存である (命題2.1 (13) (15)) ので, $f \leq f'$ のとき, $p_e \circ \Phi(j_e \circ f) \leq p_e \circ \Phi(j_e \circ f')$ かつ $p_e \circ \Psi(j_e \circ f) \leq p_e \circ \Psi(j_e \circ f')$ となる. よって, 各上半連続関数 f に対し, 下半連続関数 $p_e \circ \Phi(j_e \circ f)$ と上半連続関数 $p_e \circ \Psi(j_e \circ f)$ を対応させる作用素が (b) で求められるものである. □

X を位相空間, Y を正の内点をもつベクトル束とするとき, 次の条件 (d') は, (a),

すなわち, X が単調可算パラコンパクトであること, と同値である. $(d) \Leftrightarrow (a)$ が知られているので, $(d') \Leftrightarrow (d)$ を示せばよい. 実際, 上で紹介した $(b) \Leftrightarrow (b')$ と同様な証明方法を用いることができる.

(d) 局所有界な関数 $f : X \to \mathbb{R}$ に対し, 局所有界な下半連続関数 $\Phi(f) : X \to \mathbb{R}$ で $|f| \leq \Phi(f)$ となるようなものを対応させる作用素 Φ で, $|f| \leq |f'|$ ならば $\Phi(f) \leq \Phi(f')$ となるようなものが存在する.

(d') 局所有界な写像 $f : X \to Y$ に対し, 局所有界な下半連続写像 $\Phi(f) : X \to Y$ で $|f| \leq \Phi(f)$ となるようなものを対応させる作用素 Φ で, $|f| \leq |f'|$ ならば $\Phi(f) \leq \Phi(f')$ となるようなものが存在する.

さらに, 命題 2.1 の q_e の性質を用いることで, 以下の条件 (e'') も (a) と同値であることが示せる.

(e'') 局所的に正で下に有界な写像 $f : X \to \mathrm{int}_Y Y^+$ に対し, 局所的に正で下に有界な上半連続写像 $\Phi(f) : X \to \mathrm{int}_Y Y^+$ で $\Phi(f) \leq f$ となるようなものを対応させるような単調作用素 Φ が存在する.

4　その他の応用

第 3 章で紹介した間接証明の手法には, いくつかの応用がみられる. ここでは, [9] で提出されていた問題への肯定解を [11] から紹介する.

位相空間 X が単調 cb 空間 (*monotone cb-space*) であるとは, 局所有界な関数 $f : X \to \mathbb{R}$ に対し, **連続関数** $\Phi(f) : X \to \mathbb{R}$ で $|f| \leq \Phi(f)$ となるようなものを対応させる作用素 Φ で, $|f| \leq |f'|$ のとき $\Phi(f) \leq \Phi(f')$ となるものが存在するときをいう.

定理 4.1. ([11]) 位相空間 X と正の内点をもつ順序位相ベクトル空間 Y について, 次の (i') と (ii') は, X が単調 cb 空間であることと同値である.

(i') 局所的に上に有界な写像 $f : X \to Y$ に対し, 連続写像 $\Phi(f) : X \to Y$ で $f \leq \Phi(f)$ となるようなものを対応させる単調作用素 Φ が存在する.

(ii') 下半連続写像 $f : X \to \mathrm{int}_Y Y^+$ に対し, 連続写像 $\Phi(f) : X \to \mathrm{int}_Y Y^+$ で $\Phi(f) \leq f$ となるようなものを対応させる単調作用素 Φ が存在する.

さらに Y がベクトル束であるとき, 次の条件 (i''') も同値である..

(i''') 局所有界な写像 $f : X \to Y$ に対し, 連続写像 $\Phi(f) : X \to Y$ で $|f| \leq \Phi(f)$ となるようなものを対応させる作用素 Φ で, $|f| \leq |f'|$ のとき $\Phi(f) \leq \Phi(f')$ となるものが存在する.

単調 cb 空間は, 半連続関数に対し, (半連続より強い) 連続関数を対応させるような単調作用素の存在で定義される．連続な関数・写像の構成は, 半連続の場合と異なり, 極限の操作を必要とする．ちょうど, 分離公理から連続関数の拡張や閉集合の関数分離を導く場合のように, ある種の等高線を引く操作は,（半順序でありベクトル空間の位相が入っているという条件の）Y では同様に行うことはできない．実際, [9] で提出されていた問題は, この手法を問うものであった．本稿で紹介した間接証明は, ベクトル値においては難点であった極限操作を避けて連続写像を構成する手法であり, [11] における問題解決への鍵となった.

References

[1] C. D. Aliprantis and O. Burkinshaw, Locally solid Riesz Spaces with Applications to Economics, Second Edition, SURV 105, AMS, 2003.

[2] A. D. Aliprantis, R. Tourky, Cones and duality, GSM 84, Amer. Math. Soc. 2007.

[3] C. H. Dowker, *On countably paracompact spaces*, Canad. J. Math. **3** (1951), 219–224.

[4] R. Engelking, General Topology, Revised and completed edition, Heldermann Verlag, Berlin, 1989.

[5] C. Good, L. Haynes, *Monotone versions of countable paracompactness*, Topology Appl. **154** (2007), 734–740.

[6] C. Good, R. Knight, I. Stares, *Monotone countable paracompactness*, Topology Appl. **101** (2000), 281–298.

[7] Y. Y. Jin, L. H. Xie, H. W. Yue, *Monotone insertion of semi-continuous maps to ordered topological vector spaces*, Topology Appl. **226** (2017), 120-133.

[8] K. Yamazaki, *Insertion theorems for maps to Banach lattices*, Topology Appl. **157** (2010), 1955–1965.

[9] K. Yamazaki, *Monotone countable paracompactness and maps to ordered topological vector spaces*, Topology Appl. **169** (2014), 51–70.

[10] K. Yamazaki, *On ordered topological vector spaces with positive interior points*, Topology Proc. **52** (2018), 235–244.

[11] K. Yamazaki, *A method of returning vector-valued maps to real-valued functions on monotone operators*, Topology Appl. **246** (2018), 69–82.

[12] E.-G. Yang, *Partial answers to some questions on maps to ordered topological vector spaces*, Topology Proc. **50** (2017), 311-317.